Subgroup complexes of nilpotent subgroups (Cohomology theory of finite groups and related topics)

澤辺, 正人

数理解析研究所講究録
第 1967 巻 2015 年 123-125

Subgroup complexes of nilpotent subgroups

千葉大学・教育学部　澤辺正人
Masato Sawabe
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Chiba University, Chiba 263-8522, Japan
sawabe@faculty.chiba-u.jp

1　はじめに

この報告は山口大学 飯寄信保氏との共同研究 [4] の一部である．詳しくは [4] を参照されたい．また一連の共同研究の内容については論文 [1, 2, 3] 及び報告集 [6, 7, 8] をご覧頂きたい．

有限群 G の位数を割り切る素数全体から成る集合を $\pi(G)$ とする．素数 $p \in \pi(G)$ に対して, G の非自明な p-部分群全体から成る族を $\mathcal{S}_p(G)$ とする．$\mathcal{S}_p(G)$ は通常の包含関係に関して半順序集合を成す．そこで $\mathcal{S}_p(G)$ を半順序集合に付随する単体複体（順序複体）と同一視する．$\mathcal{S}_p(G)$ の任意の部分族 $\mathcal{X}$（あるいは G-共役の作用で閉じている部分族 $\mathcal{X}$）を同じ操作により単体複体（あるいは G-単体複体）と見なし, この $\mathcal{X}$ を一般に G の p-部分群複体と呼ぶ．

p-部分群複体それ自身はこれまで多くの人々により, また様々な動機から研究されている．一方, 相異なる素数 $p, q \in \pi(G)$ に対して $\mathcal{S}_p(G)$ と $\mathcal{S}_q(G)$ を同時に観察することも非常に重要な事であると我々は感じている．それを実行するための研究対象として, G のベキ零部分群は極めて自然なものであると思われる．そこで, ここではベキ零部分群からなる半順序集合, あるいは付随する部分群複体を考察する．

2　新しい部分群族の導入

部分集合 $\pi \in \pi(G)$ に対して, G の非自明なベキ零 π-部分群全体から成る族を $\mathcal{N}_\pi(G)$ とする．$\mathcal{N}_\pi(G)$ は G-共役の作用で閉じており, 即ち G-複体と見なすことが出来る．ここで我々が議論したい項目の一つは, $\mathcal{N}_\pi(G)$ と互いに G-ホモトピー同値となるような“性質の良い”かつ“極小な”部分族 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{N}_\pi(G)$ を特定する事である．これは常に頭の片隅に置いておきたいものである．さて $\mathcal{N}_\pi(G)$ の新たな部分族を以下の様に導入する．

$$\mathcal{L}_\pi(G) := \{U \in \mathcal{N}_\pi(G) \mid U \geq O_\pi Z N_G(U)\}$$
$$\mathcal{L}^*_\pi(G) := \{U \in \mathcal{N}_\pi(G) \mid U \geq \Omega_1 O_\pi Z N_G(U)\}$$

ここで $\mathcal{L}_\pi(G)$ を定める上記の $H := O_\pi Z N_G(U)$ は可換なシロー部分群の直積 $H = P_1 \times \cdots \times P_k$ で表される．この状況の下で $\mathcal{L}^*_\pi(G)$ を定める上記の $\Omega_1(H)$ は $\Omega_1(P_1) \times \cdots \times \Omega_1(P_k)$ で定義する．即ち $\Omega_1(H)$ は基本可換部分群の直積となる．$\mathcal{L}_\pi(G)$ と $\mathcal{L}^*_\pi(G)$ は共に G-共役の作用で閉じている．関係 $\mathcal{L}_\pi(G) \subseteq \mathcal{L}^*_\pi(G) \subseteq \mathcal{N}_\pi(G)$ も得られる．さらに $\mathcal{L}_\pi(G)$ を定める条件 $U \geq O_\pi Z N_G(U)$ は条件 $Z(U) \geq O_\pi Z N_G(U)$ と同値である．

注意 2.1 (**p-radicals と p-centrics**) 素数 $p \in \pi(G)$ をとる．

(1) 条件 $O_p N_G(U) = U$ を満足する非自明な p-部分群 $U \in \mathcal{S}_p(G)$ 全体から成る族を $\mathcal{B}_p(G)$ とする．$\mathcal{B}_p(G)$ に属する部分群は p-radical と呼ばれる．$\mathcal{B}_p(G)$ は Tits-ビルディングの一般化と見なす

ことが出来るなど「群と幾何」の分野では非常に重要な対象である．さて p-radical $U \in \mathcal{B}_p(G)$ に対して $U \geq Z(U) = ZO_pN_G(U) \geq O_pZN_G(U)$ が成り立つ．即ち $\mathcal{B}_p(G) \subseteq \mathcal{L}_p(G)$ を得る．特に $\mathcal{B}_p(G)$ と $\mathcal{L}_p(G)$ は互いに G-ホモトピー同値であることが証明される．これは我々の $\mathcal{L}_\pi(G)$ が p-radical の概念を含んでいることを示している．

(2) 非自明な p-部分群 $U \in \mathcal{S}_p(G)$ に対して，中心化群 $C_G(U)$ に属する任意の p-元が $Z(U)$ の要素に限るとき，U は p-centric と呼ばれる．これも p-radical と同様に「群と幾何」や表現論に於いて重要な対象となっている．さらに p-centric U の定義から自動的に $U \geq O_pZN_G(U)$ が導かれる．即ち $\mathcal{L}_p(G)$ は全ての p-centric を含んでいることになる．

3 ホモトピー同値性

有限群 G と部分集合 $\pi \subseteq \pi(G)$ に対して追加の記号を用意する．G の非自明な可換 π-部分群全体から成る族を $\mathcal{A}b_\pi(G)$ とする．素数 p が π を走り，かつ G の基本可換 p-部分群を直積因子とする非自明な直積部分群全体から成る族を $\mathcal{A}_\pi(G)$ とする．このとき次の命題を得る．

命題 3.1 (Proposition 4.6 in [4]) 次の G-ホモトピー同値が成り立つ．

(1) $\mathcal{N}_\pi(G) \simeq_G \mathcal{L}_\pi(G) \simeq_G \mathcal{L}^*_\pi(G) \simeq_G \mathcal{A}b_\pi(G) \simeq_G \mathcal{A}_\pi(G)$.

(2) $\mathcal{A}b_\pi(G) \simeq_G \mathcal{A}b_\pi(G) \cap \mathcal{L}_\pi(G)$.

(3) $\mathcal{A}_\pi(G) \simeq_G \mathcal{A}_\pi(G) \cap \mathcal{L}^*_\pi(G)$.

上記のホモトピー同値性はポセット幾何に於ける標準的な論法を用いて証明される．例えば，(1) の $\mathcal{N}_\pi(G) \simeq_G \mathcal{L}_\pi(G)$ を証明するためには $\mathcal{N}_\pi(G)^> \subseteq \mathcal{L}_\pi(G) \subseteq \mathcal{N}_\pi(G)$ を示せば十分である．この論法は Quillen によるファイバー定理からの帰結である．ここで $\mathcal{N}_\pi(G)^>$ は $\mathcal{N}_\pi(G)_{>U}$ が G-可縮となるような部分群 $U \in \mathcal{N}_\pi(G)$ 全体からなる族であり，また $\mathcal{N}_\pi(G)_{>U}$ は U を含む部分群 $V \in \mathcal{N}_\pi(G)$ 全体から成る族である．

また共通部分 $\mathcal{A}b_\pi(G) \cap \mathcal{L}_\pi(G)$ 及び $\mathcal{A}_\pi(G) \cap \mathcal{L}^*_\pi(G)$ に属する部分群構造は極めて制限されている．このことから，具体的な有限群 G と π が与えられれば，これらの共通部分から成る族は分類可能であるようにも思われる．

注意 3.2 ($\pi = \pi(G)$ の場合) 命題 3.1 (1) より G-ホモトピー同値 $\mathcal{N}(G) \simeq_G \mathcal{A}b(G) \simeq_G \mathcal{A}(G)$ が導かれる．ここで $\mathcal{N}(G)$ は非自明なベキ零部分群全体，$\mathcal{A}b(G)$ は非自明な可換部分群全体，$\mathcal{A}(G)$ は基本可換部分群を直積因子とする非自明な直積部分群全体である．この事実は Lucido [5, Proposition 1.2] によって既に証明されている．

注意 3.3 ($\pi = \{p\}$ の場合) 命題 3.1 (1) より G-ホモトピー同値 $\mathcal{S}_p(G) = \mathcal{N}_p(G) \simeq_G \mathcal{A}b_p(G) \simeq_G \mathcal{A}_p(G)$ が導かれる．この事実は p-部分群複体の議論の中で既に良く知られているものである．一方，命題 3.1 より次の G-ホモトピー同値が導かれる．

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_p(G) &\simeq_G \mathcal{L}_p(G) \simeq_G \mathcal{L}_p(G) \cap \mathcal{A}b_p(G) \\ &\simeq_G \mathcal{L}^*_p(G) \simeq_G \mathcal{L}^*_p(G) \cap \mathcal{A}_p(G)\end{aligned}$$

ここに示した $\mathcal{L}_p(G)$ に関連するホモトピー同値性は p-部分群複体の間の（我々の知る限り）これまでにない新しい同値性であるように思われる．

注意 3.4 (今後考察すべきこと) この研究をさらに推し進めていくためには，様々な具体例を観察する

必要がある．例えば部分群族 $\mathcal{L}_\pi(G) \cap \mathcal{A}b_\pi(G)$ を分類し，その G-共役類の代表系をリストアップすることである．ここで G の候補として散在型単純群，対称群，一般線形群などが挙げられる．π としては G の素数グラフの連結成分が相応しいと思われる．このとき π が 2 を含むかどうかで状況が変わると思われるので，この二つの場合に分けて考えるべきである．さらに複体 $\mathcal{L}_\pi(G)$ と複体の族 $\{\mathcal{S}_p(G)\}_{p\in\pi}$ との関係，あるいはホモロジー $H_*(\mathcal{L}_\pi(G))$ とホモロジーの族 $\{H_*(\mathcal{S}_\pi(G))\}_{p\in\pi}$ との関係にも着目すべきである．いずれにしても我々の $\mathcal{L}_\pi(G)$ が G の π-構造や $p \in \pi$ に対する p-構造の情報を豊富に含んでいると期待しているところである．

参考文献

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, *Tokyo J. Math.* **37**, no.1, (2014), 37–59.

[2] N. Iiyori and M. Sawabe, Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups, *Osaka J. Math.* **52**, no.1, (2015), 161–204.

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of a certain associative algebra, preprint.

[4] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups, preprint.

[5] M.S. Lucido, On the partially ordered set of nilpotent subgroups of a finite group, *Comm. Algebra* **23** (1995), 1825–1836.

[6] 澤辺正人，有限群の部分群族とパス代数の表現，
第２９回代数的組合せ論シンポジウム（弘前大学）2012，報告集．

[7] 澤辺正人，有限群の Up-Down パスから得られる単体複体について，
第３０回代数的組合せ論シンポジウム（静岡大学）2013，報告集．

[8] 澤辺正人，複素既約指標の生成定数は 1 である，
第３１回代数的組合せ論シンポジウム（東北大学）2014，報告集．